Technische Mechanik II für VT

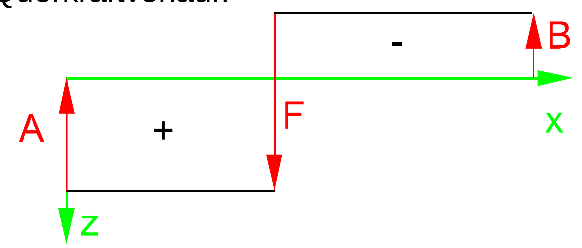
TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Zuverlässigkeitstechnik

Beispiellösung zum Aufgabenblatt Nr. 06

Biegung

Aufgabe 1:

Querkraftverlauf:



$$\sum M^A = -F \cdot a + L \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{a}{L} \cdot F \quad , \quad A = \frac{L-a}{L} \cdot F$$

Integration:

$$E \cdot I \cdot w''' = -Q(x) = -A + F \cdot \langle x-a \rangle^0$$

$$E \cdot I \cdot w'' = -M(x) = -A \cdot x + F \cdot \langle x-a \rangle^1 + c_1$$

$$E \cdot I \cdot w' = -\frac{A}{2} \cdot x^2 + \frac{F}{2} \cdot \langle x-a \rangle^2 + c_1 \cdot x + c_2$$

$$E \cdot I \cdot w = -\frac{A}{6} \cdot x^3 + \frac{F}{6} \cdot \langle x-a \rangle^3 + \frac{c_1}{2} \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

und Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$M(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$w(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{F}{6} \cdot \left((L-a) \cdot L - \frac{(L-a)^3}{L} \right)$$

ergeben die Biegelinie:

$$E \cdot I \cdot w = -\frac{F}{6} \cdot \frac{L-a}{L} \cdot x^3 + \frac{F}{6} \cdot \langle x-a \rangle^3 + \frac{F}{6} \cdot \left((L-a) \cdot L - \frac{(L-a)^3}{L} \right) \cdot x$$

Normieren (Siehe auch Schnell, Gross, Hauger, Technische Mechanik 2, Seite 112 ff) und Zusammenfassen mit:

$$\xi(x) = \frac{x}{L} \quad , \quad \alpha = \frac{a}{L} \quad , \quad \beta = \frac{L-a}{L}$$

führt zur normierten Biegelinie:

$$E \cdot I \cdot w = \frac{F \cdot L^3}{6} \cdot \left(\beta \cdot \xi(x) \cdot \left(-\xi^2(x) + 1 - \beta^2 \right) + \langle \xi(x) - \alpha \rangle^3 \right)$$

Flächenträgheitsmoment für ein Rohr:

$$I = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{4} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$$

Daraus folgt:

$$E = \frac{64}{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right) \cdot w(x)} \cdot \frac{F \cdot L^3}{6} \cdot \left(\beta \cdot \xi(x) \cdot \left(-\xi^2(x) + 1 - \beta^2\right) + \langle \xi(x) - \alpha \rangle^3\right)$$

mit:

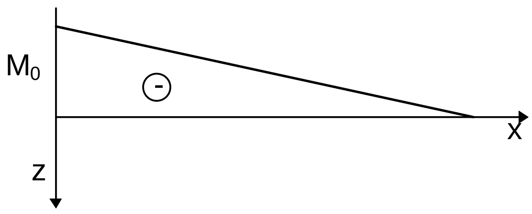
$$w\left(\frac{L}{2}\right) = f \quad , \quad F = g \cdot m \quad , \quad \xi\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{3} \quad , \quad \beta = \frac{2}{3}$$

lautet der E-Modul: $\underline{\underline{E = 547 \frac{N}{mm^2}}}$.

Somit handelt es sich hier um weiches PVC.

Aufgabe 2:

a) Momentenlinie mit M_0 = -0,5 kNm:



Da die Kraft im Schwerpunkt angreift, gelten die Formeln für gerade Biegung:

$$\sigma(x) = \frac{M(x) \cdot z}{I_y}$$

Das Flächen-Trägheitsmoment ergibt sich aus:

$$I_y = \frac{\pi}{4} \cdot \left(R^4 - r^4\right) = 18{,}1\,\mathrm{cm}^4$$

und das Biegemoment bei x = 10cm:

$$\frac{M(10\,\mathrm{cm})}{40} = \frac{-0{,}5\,\mathrm{kNm}}{50} \qquad \Rightarrow \qquad M(10\,\mathrm{cm}) = -0{,}4\,\mathrm{kNm}$$

Einsetzen ergibt:

$$\sigma = \frac{-0{,}4\,\mathrm{kNm}}{18{,}1\,\mathrm{cm}^4} \cdot (-2{,}5\,\mathrm{cm}) = 5{,}5\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} = \underline{\underline{55\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}}$$

Der Korrekturfaktor ist damit:

$$e = \frac{55}{50} = 1{,}1$$

Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Zuverlässigkeitstechnik

b) Biegelinie

$$E \cdot I \cdot w'''(x) = -Q(x) = -F$$

$$E \cdot I \cdot w''(x) = -M(x) = -F \cdot x + c_1 \qquad [x] \text{ in m}$$

$$E \cdot I \cdot w'(x) = -\frac{F}{2} \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2$$

$$E \cdot I \cdot w(x) = -\frac{F}{6} \cdot x^3 + \frac{c_1}{2} \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

Randbedingungen:

$$w'(0) = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 0$$

$$w(0) = 0 \qquad \Rightarrow c_3 = 0$$

$$M(L) = 0 \qquad \Rightarrow c_1 = F \cdot L$$

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-\frac{F}{6} \cdot x^3 + \frac{F \cdot L}{2} \cdot x^2 \right)$$