Theoretische Physik I (Mechanik) SS 09

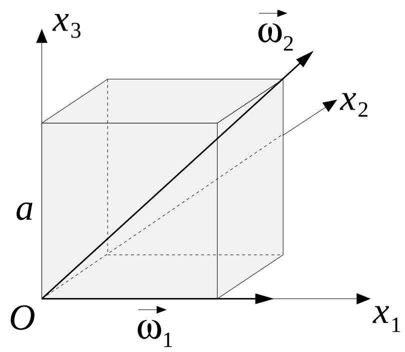
Prof. Dr. V. Meden
Dr. D. Schuricht

Blatt 6 (30 Punkte)
Abgabe 22. Mai 2009

1. Trägheitstensor eines Würfels (2+6+3+5+5+3 Punkte = 24 Punkte)

In der Vorlesung wurde die folgende Gleichung für den Trägheitstensor einer Massendichte $\rho(\vec{x})$ hergeleitet:

$$I_{i,j} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \left[\delta_{i,j}\, \vec{x}^2 - x_i\, x_j\right] d^3x.$$



Betrachten Sie einen Würfel mit Masse m und Kantenlänge a, der um seine Ecke O rotiert (siehe Skizze). Die Massenverteilung sei homogen innerhalb des Würfels.

(a) Geben Sie die Massendichte $\rho(\vec{x})$ des Würfels an.

(b) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\mathbf{I} = (I_{i,j})$ des Würfels. Welche Symmetrien besitzt $\mathbf{I}$?

(c) Der Würfel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ um die x_1-Achse (siehe Skizze). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ des Würfels. Sind Drehimpuls und Rotationsachse parallel zueinander?

(d) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente I_i des Würfels.

(e) Bestimmen Sie die zugehörigen Hauptträgheitsachsen $\vec{v}_i$.

(f) Der Würfel rotiere nun mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ um seine Hauptdiagonale (siehe Skizze). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ des Würfels. Sind Drehimpuls und Rotationsachse parallel zueinander? Was ist der Unterschied zu (c)?

Hinweis: Die Diagonalisierung symmetrischer Matrizen wurde im letzten Semester in Kapitel 2.13 behandelt.

2. Satz von Steiner (6 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N Punktmassen m_i mit Koordinaten $\vec{x}_i$, $i = 1, \ldots, N$. Der Schwerpunkt und die Gesamtmasse werden mit $\vec{R}$ und M bezeichnet. Der Trägheitstensor für Rotationen um den Schwerpunkt des Systems sei gegeben durch $\mathbf{I}^{\mathrm{SP}}$. Zeigen Sie: Der Trägheitstensor des Systems für Rotationen um den Ursprung O des Koordinatensystems ist gegeben durch

$$\mathbf{I}^{O} = \mathbf{I}^{\mathrm{PM}} + \mathbf{I}^{\mathrm{SP}},$$

wobei $\mathbf{I}^{\mathrm{PM}}$ der Trägheitstensor einer Punktmasse M am Ort $\vec{R}$ für Rotationen um den Ursprung O ist.