1 Strahlungsgesetze

1.1 Hohlraumstrahlung

Ein Körper, der alle auf ihn auftreffende Strahlung absorbiert, heißt *Schwarzer Körper.* Experimentell verwirklicht man einen Schwarzen Körper als ein kleines Loch in einem Hohlraum, dessen Wände auf einer konstanten Temperatur T gehalten werden. Wegen der vielfältigen Strahlungsabsorptionsmöglichkeiten im Inneren des Hohlraums ist es sehr unwahrscheinlich, dass eine auf das Loch fallende Strahlung dieses wieder verlässt. Die Wände des Hohlraums emittieren und absorbieren elektromagnetische Strahlung. Im Inneren des Hohlraums bildet sich ein elektromagnetisches Strahlungsfeld aus, das sich im thermischen Gleichgewicht mit den Wänden befindet. Im thermischen Gleichgewicht ist die von den Wänden emittierte Strahlungsleistung gleich der absorbierten Strahlungsleistung.
Die *spektrale Energiedichte* w_ν ist definiert durch

$$w_\nu = \frac{dw}{d\nu}$$

Die gesamte Energiedichte ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen ν:

$$w = \int_0^\infty w_\nu \, d\nu$$

Für die spektrale Energiedichte w_ν des Strahlungsfelds im Hohlraum gilt das **Wien'sche Gesetz**:

$$w_\nu = \nu^3 g\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Wir führen ein:

$$w_0 = \text{Energiedichte des elektromagnetischen Felds einer einzelnen ebenen Welle}$$

Eine ebene Welle breitet sich entlang der Achse eines Zylinders mit Volumen $V = l \cdot A$ aus. $W = w_0 V$ ist die Energie des elektromagnetischen Felds der ebenen Welle in V. Die Zeit, die

die ebene Welle benötigt, um die Strecke l zurückzulegen, ist

$$t = \frac{l}{c}$$

In der Zeit t fließt also die Energie W durch die Querschnittsfläche A. Die Strahlungsleistung P durch die Querschnittsfläche A für eine einzelne ebene Welle ist somit

$$P = \frac{W}{t} = w_0 A c$$

Wir führen ein:

$$J_0 = \text{Strahlungsleistung pro Flächeneinheit für eine einzelne ebene Welle}$$

Die Flächeneinheit ist dabei senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle, d.h. senkrecht zum Wellenvektor.
Es gilt

$$J_0 = \frac{P}{A} = w_0 c$$

Wir betrachten einen Hohlraum mit einer Öffnung der Fläche F. Das elektromagnetische Strahlungsfeld im Hohlraum ist isotrop. Wir konstruieren dieses isotrope Strahlungsfeld durch N ebene Wellen, deren Wellenvektoren gleichmäßig in alle Raumrichtungen zeigen. Die z-Achse orientieren wir parallel zur Flächennormalen von F. Es gilt

$$\frac{dN}{N} = \frac{2\pi \sin\vartheta \, d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, ,$$

wobei dN die Anzahl der ebenen Wellen ist, deren Wellenvektoren mit der Flächennormalen von F einen Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ bilden.
Die Strahlungsleistung durch F für eine einzelne ebene Welle, dessen Wellenvektor mit der Flächennormalen von F den Winkel ϑ bildet, ist

$$P_0 = 2 \cdot J_0 F \cos\vartheta$$

Der Faktor 2 tritt auf, da sich jede ebene Welle als Überlagerung von zwei linear unabhängigen ebenen Wellen mit zueinander senkrechten Polarisationsrichtungen darstellen lässt.
Die gesamte Strahlungsleistung durch F ist

$$P_{\text{tot}} = \int P_0 \, dN = FNJ_0 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2} FNJ_0$$

Die gesamte Energiedichte des Strahlungsfelds im Hohlraum ist

$$w = 2N \cdot w_0$$

Die gesamte Strahlungsleistung pro Flächeneinheit der Öffnung ist somit

$$J_{\text{tot}} = \frac{P_{\text{tot}}}{F} = \frac{c}{4} w$$

1.2 Rayleigh-Jeans-Formel

Als Hohlraum betrachten wir einen Quader mit ideal leitenden Wänden, der mit einem homogenen, ungeladenen, nichtleitenden Medium gefüllt ist. Im Inneren des Hohlraums gilt also

$$\rho_{\text{f}} = 0 \,, \quad \boldsymbol{j}_{\text{f}} = 0$$

Die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ im Hohlraum erfüllen die homogene Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

An der Grenzfläche zwischen zwei Medien 1 und 2 gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

Die Flächennormale $\boldsymbol{n}$ der Grenzfläche zeigt in das Medium 2.

In einem *idealen* Leiter verschwindet das elektrische und magnetische Feld. Am Rand des Hohlraums muss daher gelten:

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Für die x-Komponente von $\boldsymbol{E}$ lautet der Separationsansatz

$$E_x(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

Wir setzen dies in die homogene Wellengleichung ein und erhalten

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$$

Es muss gelten:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2\,, \quad \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_1^2\,, \quad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_2^2\,, \quad \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_3^2$$

wobei k_1, k_2, k_3 und ω Konstanten sind.

Für X, Y und Z verwenden wir die Lösungsform

$$X(x) = C_1 \sin(k_1 x + \alpha_1)$$

mit den reellen Konstanten C_1 und α_1.

Für T verwenden wir die Lösungsform

$$T(t) = \mathrm{Re}\left(A e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$$

mit einer komplexen Konstanten A.

Die x-Komponente von $\boldsymbol{E}$ hat damit die Form

$$
\begin{aligned}
E_x &= C_1 C_2 C_3 \sin(k_1 x + \alpha_1) \sin(k_2 y + \alpha_2) \sin(k_3 z + \alpha_3) \mathrm{Re}\left(A e^{-\mathrm{i}\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left[\, E_{0x} \sin(k_1 x + \alpha_1) \sin(k_2 y + \alpha_2) \sin(k_3 z + \alpha_3) e^{-\mathrm{i}\omega t} \,\right]
\end{aligned}
$$

Das Volumen des Hohlraums ist durch

$$
0 \le x \le L_1\,, \quad 0 \le y \le L_2\,, \quad 0 \le z \le L_3
$$

festgelegt.

Aus der Randbedingung folgt:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E}\,\big|_{x=0} &= \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E}\,\big|_{x=L_1} = 0 \\
\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{E}\,\big|_{y=0} &= \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{E}\,\big|_{y=L_2} = 0 \\
\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}\,\big|_{z=0} &= \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}\,\big|_{z=L_3} = 0
\end{aligned}
$$

Für E_x gilt also

$$
E_x(x, 0, z, t) = E_x(x, L_2, y, t) = E_x(x, y, 0, t) = E_x(x, y, L_3, t) = 0
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha_2) = 0\,, \quad \sin(k_2 L_2 + \alpha_2) = 0 \quad &\Longrightarrow \alpha_2 = 0\,, \quad k_2 = \frac{m\pi}{L_2} \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \ldots \\
\sin(\alpha_3) = 0\,, \quad \sin(k_3 L_3 + \alpha_3) = 0 \quad &\Longrightarrow \alpha_3 = 0\,, \quad k_3 = \frac{n\pi}{L_3} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir:

$$
E_x = \mathrm{Re}\left[E_{0x} \sin(k_1 x + \alpha_1) \sin\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_3} z\right) e^{-\mathrm{i}\omega t} \right]
$$

Das gleiche Verfahren ergibt für die y- und z-Komponente:

$$E_y = \mathrm{Re}\left[\, E_{0y}\sin(k_2'y+\alpha_2')\sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right)\,\sin\left(\frac{n'\pi}{L_3}z\right)\,e^{-\mathrm{i}\omega' t}\right]$$

$$E_z = \mathrm{Re}\left[\, E_{0z}\sin(k_3''z+\alpha_3'')\sin\left(\frac{l'\pi}{L_1}x\right)\,\sin\left(\frac{m'\pi}{L_2}y\right)\,e^{-\mathrm{i}\omega'' t}\right]$$

Die Gleichung $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$ kann nur dann zu allen Zeiten und an allen Orten erfüllt werden, wenn

$$\omega = \omega' = \omega''\,, \quad l = l'\,, \quad m = m'\,, \quad n = n'$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(k_1x+\alpha_1) \propto \sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right)\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\sin(k_2'y+\alpha_2') \propto \sin\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right)\,, \quad \frac{\partial}{\partial z}\sin(k_3''z+\alpha_3'') \propto \sin\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right)$$

gilt. Das bedeutet:

$$\sin(k_1x+\alpha_1) \propto \cos\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right)\,, \quad \sin(k_2'y+\alpha_2') \propto \cos\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right)\,, \quad \sin(k_3''z+\alpha_3'') \propto \cos\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right)$$

Da die Amplituden E_{0x}, E_{0y} und E_{0z} noch nicht festgelegt sind, können wir schreiben

$$E_x = \mathrm{Re}\left[\, E_{0x}\cos\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right)\,\sin\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right)\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$E_y = \mathrm{Re}\left[\, E_{0y}\sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right)\,\cos\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right)\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

$$E_z = \mathrm{Re}\left[\, E_{0z}\sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right)\,\sin\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right)\,\cos\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right)\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

Für gegebenes l, m und n ist die Lösung von $\boldsymbol{E}$ eine *Eigenmode* des Strahlungsfelds im Hohlraum.

Aus

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{c^2} &= k_1^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{l\pi}{L_1}\right)^2 + k_2'^2 + \left(\frac{n\pi}{L_3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{l\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2 + k_3''^2\end{aligned}$$

folgt

$$k_1^2 = \left(\frac{l\pi}{L_1}\right)^2 \quad , \quad k_2'^2 = \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2 \quad , \quad k_3''^2 = \left(\frac{n\pi}{L_3}\right)^2$$

Die Frequenz $\omega = \omega_{lmn}$ einer Eigenmode $\boldsymbol{E}_{lmn}$ des Strahlungsfelds im Hohlraum ist also gegeben durch

$$\omega^2 = c^2\pi^2 \left(\frac{l^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}\right)$$

$$\nu^2 = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{c}{2L_1}l\right)^2 + \left(\frac{c}{2L_2}m\right)^2 + \left(\frac{c}{2L_3}n\right)^2$$

In einem kartesischen Koordinatensystem bilden die Punkte

$$\left(\frac{c}{2L_1}l, \frac{c}{2L_2}m, \frac{c}{2L_3}n\right) , \qquad l, m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

ein Gitter. Jeder Gitterpunkt nimmt ein Volumen

$$V_E = \frac{c}{2L_1} \cdot \frac{c}{2L_2} \cdot \frac{c}{2L_3} = \frac{c^3}{8V}$$

ein. Dabei ist $V = L_1 L_2 L_3$ das Volumen des Hohlraums. Jedem Gitterpunkt entspricht die Frequenz einer möglichen Eigenmode. Alle Gitterpunkte, die einer Frequenz von 0 bis ν entsprechen, liegen innerhalb eines Kugeloktanten mit Radius ν und Volumen

$$V_K = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi\nu^3 = \frac{\pi}{6}\nu^3$$

Die Anzahl $N(\nu)$ der Gitterpunkte im Kugeloktanten mit Radius ν ist gleich der Anzahl der möglichen Frequenzen von 0 bis ν.

Für

$$\nu \gg \frac{c}{2L_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wird $N(\nu)$ gut angenähert durch

$$N(\nu) = \frac{V_K}{V_E} = \frac{4}{3}\pi V \frac{\nu^3}{c^3}$$

Die Anzahl der möglichen Frequenzen pro Frequenzintervall ist dann

$$\frac{dN(\nu)}{d\nu} = 4\pi V \frac{\nu^2}{c^3}$$

Aus $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ folgt

$$E_{0x}\frac{l\pi}{L_1} + E_{0y}\frac{m\pi}{L_2} + E_{0z}\frac{n\pi}{L_3} = 0$$

Der Amplitudenvektor $\boldsymbol{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ einer Eigenmode $\boldsymbol{E}_{lmn}$ liegt in einer Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{k} = (l\pi/L_1, m\pi/L_2, n\pi/L_3)$. Man kann $\boldsymbol{E}_0$ deshalb in zwei zueinander senkrechte Anteile zerlegen:

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_0^{(1)} + \boldsymbol{E}_0^{(2)}\,, \qquad \boldsymbol{E}_0^{(1)} \cdot \boldsymbol{E}_0^{(2)} = 0$$

Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ sind linear unabhängig, wenn

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 = 0$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ erfüllt ist.

Wir betrachten

$$\lambda_1 \boldsymbol{E}_{lmn}^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{E}_{lmn}^{(2)}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} E_{0x}^{(1)} \cos\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right) \\ E_{0y}^{(1)} \sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right) \\ E_{0z}^{(1)} \sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right) \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega t} + \lambda_2 \begin{pmatrix} E_{0x}^{(2)} \cos\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right) \\ E_{0y}^{(2)} \sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right) \\ E_{0z}^{(2)} \sin\left(\frac{l\pi}{L_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_2}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_3}z\right) \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lambda_1 \boldsymbol{E}_0^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{E}_0^{(2)} = 0$$

Wegen $\boldsymbol{E}_0^{(1)} \cdot \boldsymbol{E}_0^{(2)} = 0$ ist diese Gleichung nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ erfüllt, d.h. $\boldsymbol{E}_{lmn}^{(1)}$, $\boldsymbol{E}_{lmn}^{(2)}$ sind linear unabhängig. Jede Eigenmode lässt sich daher als Überlagerung von zwei linear unabhängigen Eigenmoden mit zueinander senkrechten Polarisationsrichtungen darstellen.

Die Anzahl der Eigenmoden des Strahlungsfelds im Hohlraum pro Frequenzintervall ist somit

$$2 \cdot \frac{dN(\nu)}{d\nu} = 8\pi V \frac{\nu^2}{c^3}$$

Nach dem Gleichverteilungssatz ist die mittlere kinetische Energie pro Freiheitsgrad $\frac{1}{2}k_B T$. Jede Eigenmode hat zwei Freiheitsgrade. Jede Eigenmode hat daher die mittlere Energie $k_B T$.

Die spektrale Energiedichte des Strahlungsfelds im Hohlraum ist somit

$$w_\nu = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T$$

Dies ist die **Rayleigh-Jeans-Formel**. Das Wien'sche Gesetz ist offensichtlich erfüllt.

1.3 Planck'sche Strahlungsformel

Nach der Planck'schen Hypothese ist die Energie einer Eigenmode des Strahlungsfelds ein ganzzahliges Vielfaches eines elementaren Energiequants ϵ_0:

$$E_n = n\epsilon_0\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Atome der Hohlraumwände können deshalb auch nur solche Strahlung emittieren oder absorbieren, deren Energien ein ganzzahliges Vielfaches von ϵ_0 sind. Die Energien der Atome können also nur diskrete Werte annehmen.
Für die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass eine Eigenmode die Energie $E_n = n\epsilon_0$ hat, gilt nach der klassischen Boltzmann-Statistik:

$$p(n) \propto e^{-\beta E_n}$$

Es muss

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$$

gelten, da eine Eigenmode ja irgendeine Energie haben muss. Daraus folgt

$$p(n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}}$$

Die mittlere Energie pro Eigenmode ist dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) E_n = \frac{\epsilon_0}{e^{\beta\epsilon_0} - 1}$$

Die spektrale Energiedichte des Strahlungsfelds im Hohlraum ist somit

$$w_v = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{\epsilon_0}{e^{\beta\epsilon_0} - 1}$$

Wenn wir jetzt noch fordern, dass das Wien'sche Gesetz erfüllt ist, so folgt, dass ϵ_0 proportional zur Frequenz ν sein muss:

$$\epsilon_0 = h\nu$$

Wir erhalten somit die **Planck'sche Strahlungsformel**:

$$w_v = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

2 Rutherford-Streuung

Die von einem radioaktiven Material ausgesandten α-Teilchen fallen durch eine Blende auf eine dünne Goldfolie. Um die Goldfolie herum befindet sich ein Szintillationsschirm. Die auf den Szintillationsschirm treffenden α-Teilchen erzeugen schwache Lichtblitze, die durch ein schwenkbares Mikroskop beobachtet und gezählt werden.
Man beobachtete, dass fast alle α-Teilchen die Goldfolie unbeeinflusst durchsetzten. Einige wenige wurden aber auch sehr stark abgelenkt, bisweilen sogar um mehr als 90°. Aus der Seltenheit solcher großer Ablenkwinkel schloss Rutherford, dass der Radius des ablenkenden *Atomkerns* im Zentrum des Atoms etwa 10^{-13} cm bis 10^{-12} cm betragen dürfte. Um die schweren α-Teilchen ablenken zu können, muss der Atomkern praktisch die gesamte Atommasse in sich vereinigen. Aus der Art der Ablenkung folgt zwingend, dass der Atomkern ebenso wie das α-Teilchen positiv geladen sein muss. Die Ladungsneutraliät des Atoms wurde nach Rutherford von Elektronen gewährleistet, die um den Kern kreisen. Die α-Teilchen werden praktisch nur vom Atomkern abgelenkt, da die Elektronenmasse sehr klein ist gegenüber der Masse des α-Teilchens.

2.1 Rutherford'sche Streuformel

Die Ableitung der Streuformel geht von folgenden Voraussetzungen aus:

(1) Masse des Atomkerns $\gg$ Masse des α-Teilchens. Diese Annahme ist bei Verwendung einer Goldfolie als Target sicher gerechtfertigt.

(2) Ladung des Atomkerns $= Ze$. Z ist eine ganze Zahl.

(3) Auf das α-Teilchen wirkt die Coulomb-Kraft

$$\boldsymbol{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_K}{|\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_K|^3}$$

(4) Keine Mehrfachstreuung.

Der *Stoßparameter* p ist der Abstand, in dem das α-Teilchen am Atomkern vorbeifliegen würde, wenn es keine Wechselwirkungen gäbe.

Der Ursprung des Koordinatensystems soll im Atomkern liegen und die Einfallrichtung des α-Teilchens zeigt in die positive x-Richtung. Das Teilchen kommt zum Zeitpunkt t_A im Punkt A, der noch weit vom Kern entfernt ist, mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t_A) = v_0\, \boldsymbol{e}_x$ an.

Da die Coulomb-Kraft kein Drehmoment ergibt, ist der Drehimpuls zeitlich konstant. Der Drehimpuls zum Zeitpunkt t_A und der Drehimpuls zu einem beliebigen Zeitpunkt sind also gleich. Mit Polarkoordinaten (r, φ) erhalten wir

$$|\boldsymbol{L}(t_\mathrm{A})| = |m_\alpha \boldsymbol{r}(t_\mathrm{A}) \times \boldsymbol{v}(t_\mathrm{A})| = m_\alpha v_0 p$$

$$\boldsymbol{L} = m_\alpha \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m_\alpha r\, \boldsymbol{e}_r \times \left[\frac{dr}{dt}\, \boldsymbol{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt}\, \boldsymbol{e}_\varphi \right] = m_\alpha r^2 \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_z$$

$$\Longrightarrow m_\alpha v_0 p = m_\alpha r^2 |\dot{\varphi}| = -m_\alpha r^2 \dot{\varphi}$$

Für die Ablenkung des Teilchens ist die y-Komponente der Kraft verantwortlich. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m_\alpha \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \sin\varphi = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\varphi = -k \frac{\dot{\varphi}}{v_0 p} \sin\varphi$$

mit der Abkürzung $k = 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0)$.

Wir integrieren beide Seiten der Gleichung über die Zeit:

$$\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \frac{dv_y}{dt}\,dt = -\frac{k}{m_\alpha v_0 p}\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

Zum Zeitpunkt t_A ist das Teilchen im Punkt A und zum Zeitpunkt t_B ist das Teilchen im Punkt B. Die Punkte A und B liegen im Unendlichen. Zum Zeitpunkt t_A gilt dann:

$$v_y(t_A) = 0\,, \quad \varphi(t_A) = \pi$$

In den Punkten A und B verschwindet die potentielle Energie. Aus dem Energiesatz folgt:

$$|\boldsymbol{v}(t_\mathrm{A})| = v_0 = |\boldsymbol{v}(t_\mathrm{B})|$$

Zum Zeitpunkt t_B gilt dann:

$$v_y(t_\mathrm{B}) = v_0 \sin\vartheta\,, \quad \varphi(t_\mathrm{B}) = \vartheta$$

ϑ ist der Ablenkwinkel, d.h. der Winkel zwischen der Einfallrichtung und der Richtung des Teilchens nach der Streuung. Die Integration ergibt die Beziehung zwischen Stoßparameter p und Ablenkwinkel:

$$v_0 \sin\vartheta = \frac{k}{m_\alpha v_0 p}(1+\cos\vartheta)$$

$$\Longrightarrow\ p = \frac{k}{m_\alpha v_0^2}\cot\frac{\vartheta}{2}$$

Alle Teilchen mit Stoßparameter zwischen p und $p+dp$, d.h. alle Teilchen, die durch einen Kreisring mit Radien $r_1 = p$ und $r_2 = p + dp$ treten, werden um einen Winkel zwischen ϑ und $\vartheta - d\vartheta$ abgelenkt.

Die Goldfolie der Dicke Δx hat die Fläche F und die Atomdichte n. Die Folie enthält also $nF\Delta x$ Atomkerne. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einfallendes α-Teilchen um einen Winkel zwischen ϑ und $\vartheta - d\vartheta$ abgelenkt wird, ist gegeben durch

$$W = \frac{2\pi p\, dp \cdot nF\Delta x}{F}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Goldfolie hinreichend dünn ist, sodass die Kreisringflächen sich nicht überlappen. Bei N einfallenden α-Teilchen ist die Anzahl dN' der α-Teilchen, die um einen Winkel zwischen ϑ und $\vartheta - d\vartheta$ abgelenkt werden, gegeben durch

$$dN' = W \cdot N = Nn\Delta x \cdot 2\pi p\, dp$$

Diese Teilchen durchsetzen einen Kreisring der Fläche $2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$ auf der Kugel mit Radius R um die Goldfolie. Es bleibt noch zu bedenken, dass nur ein Segment dieses Kreisrings mit der Fläche $dF_D = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ vom Detektor bedeckt ist.

Die Anzahl dN der α-Teilchen, die unter einem Winkel zwischen ϑ und $\vartheta - d\vartheta$ in das Raumwinkelelement $d\Omega = dF_D/R^2$ gestreut werden, ist

$$dN = dN' \cdot \frac{dF_D}{2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta}$$

Wenn wir nun p und

$$dp = \frac{dp}{d\vartheta}\, d\vartheta = -\frac{k}{m_\alpha v_0^2}\frac{1}{2\sin^2\vartheta/2}\, d\vartheta$$

einsetzen, erhalten wir die **Rutherford'sche Streuformel**

$$dN = -Nn\Delta x \frac{k^2}{m_\alpha v_0^2}\frac{1}{4\sin^4\vartheta/2}\frac{dF_D}{R^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{dN}{N} = -\frac{Z^2 e^4 n\Delta x}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_\alpha v_0^2 \sin^4\vartheta/2}\, d\Omega$$